Lista nr 11 (poziom rozszerzony)

Zad. 1 (3 pkt.) Udowodnić, że poniższa liczba jest wymierna.

$$\sqrt{13-4\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}$$

Zad. 2 (3 pkt.) Pokazać, że dla każdej liczby naturalnej *n* wartość poniższego wyrażenia jest liczbą naturalną:

$$\frac{1}{6}n^3+n^2+\frac{11}{6}n+1$$

Zad. 3 (5 pkt.) Iloczyn pierwszego i piątego wyrazu rosnącego ciągu arytmetycznego a_n wynosi 65, a suma wyrazu drugiego i szóstego tego ciągu jest równa 22. Suma pierwszych 25 wyrazów ciągu arytmetycznego b_n o numerach nieparzystych wynosi 1850, a suma pierwszych 25 wyrazów o numerach parzystych tego ciągu wynosi 1925. Oblicz granice ciągu a_n/b_n.

Zad.4 (3 pkt.) Rozwiąż równanie w przedziale $[0,2\pi]$

$$\cos 2x-\cos x=0$$

Zad. 5 (3 pkt.) Znaleźć wartość najmniejszą i największą funkcji $f(x) = 4^x - 2^{x+1} - 8$ w przedziale [-1,3].

Zad. 6 (4 pkt.) Dla jakiego parametru m funkcja $f(x) = (1-2mx^2):(x-1)$ nie posiada ekstremów.

Zad. 7 (4 pkt.) Wykazać, że pole *P* czworokąta wypukłego o bokach długości *a, b, c, d* spełnia nierówność:

$$P\le\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}.$$

Zad. 8 (6 pt.) W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB zawiera się w prostej $y = - x + 3$, a ramię AC w prostej $y = 2x + 6$. Wyznacz współrzędne wierzchołków A,B,C wiedząc, że punkt $D = (-1, 10)$ leży na ramieniu BC tego trójkąta.

Zad. 9 (5 pkt.) Ostrosłup prawidłowy czworokątny, w którym krawędź podstawy wynosi 6 cm, przecięto płaszczyzną prostopadłą do krawędzi bocznej i zawierającą przekątną podstawy. Otrzymany przekrój jest trójkątem, w którym jeden z kątów wewnętrznych wynosi 120°. Oblicz objętość i pole ostrosłupa.

Zad. 10 (4 pkt.) Siła kiełkowania nasiona palmy kokosowej wynosi 0,4. Ile nasion trzeba wysiać, aby prawdopodobieństwo wykiełkowania przynajmniej jednego z nich było większe od 0,99?

Zad. 11 (3 pkt.) Dla jakich wartości parametru *k* ma rozwiązanie poniższe równanie:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{2k+1}{k-1}.$$

Zad. 12 (3 pkt.) Ze zbioru liczb {1, 2, 3, …, 2n+1}, gdzie *n* jest liczbą naturalną, losujemy ze zwracaniem dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma wylosowanych liczb będzie większa od 2n+1.

Zad. 13 (4 pkt.) Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCS$, w którym podstawą jest trójkąt równoboczny ABC o boku długości 6. Na krawędziach bocznych BS i CS wybrano punkty, odpowiednio D i E, takie że

$$|BD| = |CE|, |DE| = 4.$$

Płaszczyzna ADE jest prostopadła do płaszczyzny ściany bocznej BCS ostrosłupa. Oblicz objętość ostrosłupa.

Zad. 14 (3 pkt.) Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dokładnie jednej kuli białej z urny zawierającej kule w dwóch kolorach, jeżeli wybieramy z urny losowo dokładnie dwie kule. Prawdopodobieństwo wylosowania co najmniej jednej kuli białej jest równe $\frac{8}{15}$, a prawdopodobieństwo wybrania co najwyżej jednej kuli białej jest równe $\frac{14}{15}$.

Zad. 15 (3 pkt.) Udowodnij, że poniższa liczba jest liczbą naturalną:

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}.$$

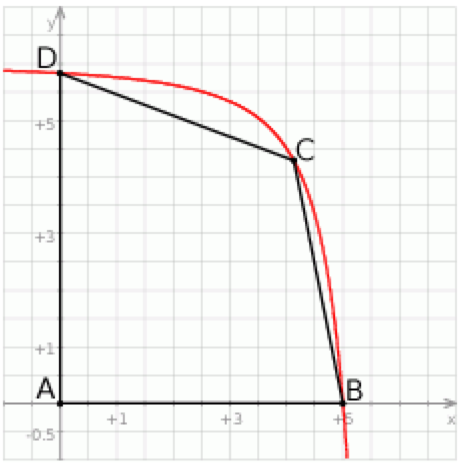
Zad. 16 (4 pkt.) Pokazać, że dla każdej rzeczywistej liczby M poniższa nierówność ma zawsze rozwiązanie w przedziale (-3/2, 0)

$$M + \log(4x^2 + 12x + 9) < \log(4x^2 + 16x + 15).$$

Zad. 17 (5 pkt.) Poniżej przedstawiony jest fragment wykresu funkcji *f*

$$f(x) = \frac{6x^2-72x+210}{x^2-12x+36}, \quad x \in (-\infty, 6).$$

Wykres ten przecina osie odpowiednio w punktach B i D oraz punkt A jest początkiem układu współrzędnych. Rozpatrzmy czworokąty ABCD , gdzie punkt C leży na wykresie tej funkcji pomiędzy punktami B i D. Oblicz odciętą wierzchołka C tego czworokąta, którego pole jest największe.



Odp. $x = 6 - 2\sqrt[3]{441}/7$

Zad. 18 (6 pkt.) Rozwiąż nierówność

$$\frac{|\log(x+1)|}{x^2-1} \leqslant \log(x+1)^2.$$

Odp. $x \in (-1, -\sqrt{1/2}] \cup [0,1) \cup [\sqrt{3/2}, \infty)$.